



W
28
(9018)

Documento de Trabajo

9 0 1 8

ITERACIONES EN UNA APLICACION



LINEAL PROYECTIVA

Manuel Morán Cabré

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asimismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO
Boletín de Pedido.
Nombre de la persona o institución:
.....
Calle: nº
Ciudad:Distrito Postal:.....País:
Solicita una suscripción permanente <input type="checkbox"/>
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación) <input type="checkbox"/>
Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación:
.....
Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

ITERACIONES EN UNA APLICACION

LINEAL PROYECTIVA

Datos personales.

Manuel Morán Cabré. Doctor en Matemáticas por la U.C.M.
Profesor del departamento de Análisis Económico de la Facultad de
Económicas de la U.C.M.

RESUMEN.

En este trabajo se estudian los sistemas dinámicos definidos por aplicaciones lineales proyectivas en el espacio proyectivo complejo n -dimensional, realizándose previamente un estudio de las propiedades algebraicas y topológicas de dicho espacio. Se obtiene la existencia de una variedad atractora en forma de toro r -dimensional, y condiciones suficientes para que tal variedad se reduzca a un sólo punto.

INTRODUCCION

El estudio de las iteraciones de una aplicación lineal sobre un -- punto no parece prometer resultados espectaculares, pues enseguida se ve que salvo casos fuertemente restrictivos las sucesiones obtenidas son divergentes.

En el caso de las aplicaciones lineales proyectivas de un espacio proyectivo de dimensión finita, el hecho de ser este conjunto compacto permite asegurar la existencia de algún valor de adherencia -- para la sucesión de iteraciones. Profundizando en el estudio, se -- llega a la existencia de las llamadas variedades atractoras, que -- son los conjuntos de valores de adherencia. En el caso del espacio proyectivo complejo, dichas variedades atractoras resultan ser homeomorfas a toros r - dimensionales, lo que justifica su nombre. La elección de \mathbb{C} como cuerpo, se debe a la combinación de propiedades algebraicas y topológicas que presenta, y que permiten una mayor -- riqueza en los resultados, no presentando su adaptación al caso -- real mayores dificultades.

Los hechos que se utilizan en este estudio son fundamentalmente -- sencillos, aunque la complejidad de los teoremas de clasificación de endomorfismos que se necesitan hace necesaria una ordenación -- adecuada en los subíndices que puede parecer complicada pero es -- imprescindible. El estudio hace acopio de los resultados que necesitará en la 3ª parte a lo largo de dos primeros apartados, algebraico y topológico respectivamente, en los que se ha desmenuzado al máximo todo lo que se hace, para facilitar la lectura crítica -- del trabajo. Los resultados esenciales están resumidos en los puntos 3.1, 3.11, 3.12 y 3.14

13-V-86

M. Mañá

1.- PRELIMINARES ALGEBRAICOS

1.1 Espacio proyectivo complejo de n dimensiones

Sea V_{n+1} un espacio vectorial de $n+1$ dimensiones sobre \mathbb{C} , cuerpo de los números complejos. Sea $V_{n+1}^* = V_{n+1} - \{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$. En V_{n+1}^* se establece la relación de equivalencia:

$$v R_g w \iff v = \lambda w, \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

El conjunto de las clases de equivalencia, es decir, las rectas vectoriales de V_{n+1} excluyendo de ellas el 0, es el espacio proyectivo complejo de n dimensiones :

$$P_n = \frac{V_{n+1}^*}{R_g}$$

La aplicación $g : V_{n+1}^* \longrightarrow P_n$ es la proyección canónica asociada a la relación de equivalencia R_g que a cada v hace corresponder la clase de equivalencia de v , $g(v)$. En este trabajo se da preferencia a esta notación en lugar de la clásica, \bar{v} , a fin de evitar la posible confusión con el símbolo de adherencia topológica.

A través de la proyección canónica, se establece una correspondencia entre las variedades lineales de V_{n+1} y las llamadas variedades lineales proyectivas de P_n , que son de la forma $g(E^*)$ donde E es una variedad lineal de V_{n+1} y $E^* = E - \{0\}$.

Para indicar la variedad lineal de V_{n+1} generada por un sistema de vectores S , utilizaremos el símbolo $\langle S \rangle$.

Si $P \subset P_n$ es un conjunto de puntos de P_n , por $\langle P \rangle$ entenderemos la variedad lineal proyectiva generada por P , es decir $g(g^{-1}(P)^*)$.

Si $\langle v \rangle$ es una recta vectorial, $g(\langle v \rangle^*)$ será un punto de P_n . En general, a variedades lineales de $n+1$ dimensiones, corresponden por la proyección canónica g variedades lineales proyectivas de n dimensiones.

1.2 Aplicaciones lineales proyectivas.

Sea A un operador lineal regular $A: V_{n+1} \longrightarrow V_{n+1}$.

Construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_{n+1} & \xleftarrow{g^{-1}} & P_n \\ A \downarrow & & \downarrow f_A \\ V_{n+1} & \xrightarrow{g} & P_n \end{array}$$

Como A es regular, $A(0) = 0$, y $A(V_{n+1}^*) = V_{n+1}^*$.

Podemos definir:

$$f_A = g A g^{-1}$$

La definición es correcta, ya que si $p \in P_n$, $g^{-1}(p)$ es una recta vectorial de V_{n+1} a excepción del 0 , y como A es un operador lineal regular, $A g^{-1}(p)$ será también una recta vectorial de V_{n+1} menos el 0 y por tanto $g A g^{-1}(p)$ será un punto bien determinado de P_n .

Las aplicaciones $f_A : P_n \longrightarrow P_n$ así obtenidas, se llaman aplicaciones lineales proyectivas. La aplicación f_A se dice que es asociada al operador A , y también se dice que el operador A es asociado a f_A . A lo largo de este trabajo utilizaremos sistemáticamente la abreviatura "a.l.p." para indicar que una aplicación es lineal proyectiva.

La condición necesaria y suficiente para que las a.l.p. asociadas a dos operadores A y B sean la misma, es que los operadores sean proporcionales, o dicho de otra forma, una a.l.p. determina un operador lineal de forma única, salvo un factor de proporcionalidad arbitrario, no nulo.

Demostración:

Tratamos de probar que $f_A = f_B \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* / A = \lambda B$

$$f_A = f_B \iff g A g^{-1} = g B g^{-1}$$

Como $g(v) = g(w) \iff v = \lambda w, \lambda \in \mathbb{C}^*$, tendremos $\forall p \in P_n$

$$g(A g^{-1}(p)) = g(B g^{-1}(p)) \iff A g^{-1}(p) = \lambda B g^{-1}(p)$$

$$\iff A = \lambda B$$

La última implicación es consecuencia de que al ser g la proyección canónica de R_g , los $g^{-1}(p)$ cubren todo V_{n+1}^* , y si A y B coinciden en este conjunto, coinciden en todo V_{n+1} por $B(0) = A(0) = 0$.

1.3 Sistemas de coordenadas.

Elegida una base B en V_{n+1} , queda establecido el isomorfismo canónico $C^{n+1} \cong V_{n+1}$. Cada vector $v \in V_{n+1}$ se expresa matricialmente por la matriz fila o columna de sus $n+1$ coordenadas complejas. Para expresar mediante coordenadas los puntos de P_n disponemos de dos sistemas de coordenadas alternativos:

a) Coordenadas homogéneas

Se toman por coordenadas de $p \in P_n$ las coordenadas de $v \in g^{-1}(p)$. Naturalmente la correspondencia entre puntos y coordenadas así establecida no es biunívoca, ya que el v se ha elegido arbitrariamente de $g^{-1}(p)$, recta vectorial menos el 0. Para hacer notar este hecho, si las coordenadas de v son (x_0, x_1, \dots, x_n) se llaman coordenadas homogéneas de p a la expresión $\lambda(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Nótese que cualquier punto de $g^{-1}(p)$ tiene coordenadas de esta forma, con $\lambda \in C^*$.

b) Coordenadas afines.

Como $p \in P_n$ no puede tener todas sus coordenadas homogéneas nulas, - si es por ejemplo $x_0 \neq 0$, se obtienen las llamadas coordenadas afines de p respecto del hiperplano $x_0 = 1$ como la n -tupla $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, donde $\xi_i = \frac{x_i}{x_0}$. Los puntos del hiperplano $x_0 = 0$ quedan sin coordenadas afines. Dicho hiperplano se llama hiperplano impropio. Este tipo de coordenadas jugará un papel principal en este estudio.

1.4 Expresión matricial de una a.l.p.

Viene dada por la matriz de los operadores lineales a ella asociados. Si f_A es la a.l.p., A el operador lineal asociado, M_A la matriz de A , λX la matriz de coordenadas homogéneas de p y $\lambda' X'$ la de $f_A(p)$, a la definición de f_A , $f_A(p) = g A g^{-1}(p)$, corresponde la ecuación matricial:

$$\lambda' X' = \delta M_A \lambda X$$

Donde $\delta \in C^*$, es un escalar arbitrario, ya que el operador A está determinado salvo un escalar no nulo e igual sucede con su matriz, -- hecho que utilizaremos a menudo. Esta ecuación se expresa sencillamente:

$$\lambda X' = M_A X$$

Englobando en λ los demás factores arbitrarios

1.5 Base canónica

La base B que se elige para V_{n+1} es siempre aquella en la que el operador lineal A asociado a la a.l.p. cuyas iteraciones se estudian, f_A , queda reducido a su forma canónica de Jordán. Como no es única la base B que verifica esta condición, escogeremos B de forma -- que se adapte optimamente al punto $p \in P_n$ cuyas iteraciones $f_A^m(p)$ -- estudiemos, haciendo esto según los criterios que se expondrán mas adelante.

Los apartados próximos están dedicados a los resultados sobre clasificación de endomorfismos y forma canónica de Jordán. En ellos se fija un sistema de subíndices que ayuda a tratar con comodidad los problemas planteados.

1.6 Espectro de A

Si A es un operador lineal en V_{n+1} , $\text{Spec}A = \{\lambda_i\}_{i \in \mathcal{P}}$ es el conjunto de los valores propios del operador A . A lo largo de todo nuestro estudio utilizaremos el conjunto de subíndices $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, p\}$

1.6 Subespacios propios V^{λ_i}

Subespacio propio relativo al valor propio λ_i es el conjunto de vectores $v \in V_{n+1}$ que verifican:

$$Av = \lambda_i v$$

Para un operador cuya expresión matricial consta de una única célula de Jordán:

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

El subespacio propio V^{λ_1} se reduce a la recta vectorial engendrada por el vector $v(1, 0, 0, \dots, 0)$. Es fácil comprobar que $Av = \lambda_1 v$, y además la ecuación $Av = \lambda_1 v \iff (A - \lambda_1 I)v = 0$ tiene por solución una recta vectorial por ser el rango de $(A - \lambda_1 I)$ igual a n .

1.8 Subespacio radical $V(\lambda_i)$

Relativo al valor propio λ_i se define como el conjunto de vectores $v \in V_{n+1}$ que verifican para algún k : $(A - \lambda_i I)^k v = 0$.

Los subespacios radicales son invariantes para el operador A : ----
 $A(V(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ (En un operador lineal cualquiera sólo se ---
 verifica en general la inclusión. En el caso que nos ocupa de opera--
 dores regulares, también es verdadera la igualdad).

Si la matriz de A adopta su forma canónica de Jordán, para una base
 adecuada el operador A restringido a $V(\lambda_i)$ tiene por matriz una --
 submatriz de la forma canónica de Jordan que agrupa todas las célu--
 las relativas al valor propio λ_i .

En general $V^{\lambda_i} \subset V(\lambda_i)$, pero la igualdad no es verdadera. En el --
 ejemplo puesto en 1.7, $V(\lambda_i)$ es todo el espacio , mientras V^{λ_i} es
 una recta vectorial.

El espacio vectorial V_{n+1} se descompone en suma directa de sus su--
 bespacios radicales:

$$V_{n+1} = \bigoplus_{i \in \mathcal{P}} V(\lambda_i)$$

1.9 Subespacios invariantes elementales

Utilizaremos la abreviatura s.i.e para referirnos a ellos.

Cada subespacio radical se descompone en suma directa de sus s.i.e.
 El conjunto de subíndices que usaremos para escribir esta suma di--
 recta relativa al subespacio radical $V(\lambda_i)$ será S_i :

$$V(\lambda_i) = \bigoplus_{j \in S_i} V_{ij}$$

Cada s.i.e. V_{ij} es invariante para el operador A y no se puede des--
 componer en suma directa de otros subespacios invariantes, aunque -
 pueda tener subespacios invariantes incluidos propiamente, como en
 el ejemplo 1.7 donde todo $V(\lambda_i)$ es un s.i.e. y el subespacio pro--
 pio V^{λ_i} está incluido propiamente en $V(\lambda_i)$ y es invariante.

En una base adecuada, el operador A/V_{ij} se expresa matricialmente -
 con una única célula de Jordán, relativa al valor propio λ_i

Utilizaremos el conjunto de subíndices $J = \{(i,j) / i \in \mathcal{P}, j \in S_i\}$ para
 escribir V_{n+1} como suma directa de todos sus s.i.e.

De forma que se escribirá:

$$V_{n+1} = \bigoplus_{(i,j) \in J} V_{ij}$$

La dimensión de cada V_{ij} será $r_{ij} + 1$.

La célula de Jordán $r_{ij} + 1$ - dimensional que expresa la matriz de A/V_{ij} se denotará C_{ij} .

1.10 Sistema de subíndices para la base canónica

La base canónica B es la unión de las bases B_{ij} de los s.i.e. V_{ij} respecto de las cuales las matrices de A/V_{ij} son las células de Jordán C_{ij} . La base canónica B se escribe:

$$B = \bigcup_{(i,j) \in J} B_{ij}$$

Cada B_{ij} consta de $r_{ij} + 1$ vectores

$$B_{ij} = \{e_{ijk}\} \quad 0 \leq k \leq r_{ij}$$

El conjunto de subíndices necesario para expresar la base completa será:

$$R = \{(i,j,k) / (i,j) \in J, 0 \leq k \leq r_{ij}\}$$

Con esto se escribe

$$B = \{e_{ijk}\} \quad (i,j,k) \in R$$

En este sistema de subíndices, el primer subíndice de cada vector expresa su pertenencia al subespacio radical del valor propio correspondiente a dicho índice, los dos primeros índices indican el s.i.e., y el último índice el lugar que ocupa en la base B_{ij} que mas adelante definiremos como altura de e_{ijk} respecto a B_{ij} y que desempeña un papel importante en resultados posteriores.

Consecuentemente con este sistema de subíndices para B , utilizaremos para las coordenadas de los vectores de V_{n+1} matrices afectadas del mismo sistema de subíndices. La matriz de un vector tiene la forma $(x_{ijk})_{(i,j,k) \in R}$ o simplemente $(x_{ijk})_R$ o bien (x_{ijk}) si no hay posibilidad de confusión.

Las proyecciones de cada vector v sobre los s.i.e. V_{ij} se escribirán $pr_{ij}(v)$, o simplemente v_{ij} .

Cualquier vector se puede escribir:

$$v = \sum_{(i,j) \in J} v_{ij}$$

Si X_{ij} es una matriz que expresa v_{ij} en la base B_{ij} se puede escribir simbólicamente

$$C X = \bigoplus_{(i,j) \in J} C_{ij} X_{ij}$$

Donde C es la matriz de A en la base B y X la matriz de Av , siendo las C_{ij} las matrices de A/V_{ij} que se reducen a células de Jordán. También simbólicamente puede escribirse:

$$C = \bigoplus_{(i,j) \in J} C_{ij}$$

La actuación de C sobre X se puede escribir:

$$\left(\bigoplus_{(i,j) \in J} C_{ij} \right) \left(\bigoplus_{(i,j) \in J} X_{ij} \right) = \bigoplus_{(i,j) \in J} C_{ij} X_{ij}$$

Volviendo a aplicar C al segundo miembro de la igualdad m veces se obtiene la expresión

$$C^m = \bigoplus_{(i,j) \in J} C_{ij}^m$$

Vamos por último a caracterizar los subespacios propios encontrando el sistema de vectores que forman sus bases.

El subespacio propio V^{λ_i} resulta generado por los primeros vectores de las bases de cada s.i.e. de los que consta el subespacio radical $V(\lambda_i)$

$$V^{\lambda_i} = \langle e_{ij0} \rangle \quad j \in S_i$$

Por ejemplo, si la matriz de A es:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Con espectro reducido a λ , un solo subespacio radical y tres s.i.e., dos bidimensionales y uno unidimensional.

$$B_{11} = \{e_{110}, e_{111}\}$$

$$B_{12} = \{e_{120}, e_{121}\}$$

$$B_{13} = \{e_{130}\}$$

Se tiene :

$$V(\lambda) = V_5$$

$$V^{\lambda} = \langle e_{110}, e_{120}, e_{130} \rangle$$

2 PROPIEDADES TOPOLOGICAS

Como el objeto de nuestro estudio es el comportamiento de las iteraciones $f_A^m(p)$ de una a.l.p. que actúa sobre un punto de P_n cuando m tiende a infinito, es necesario abordar el estudio de las propiedades topológicas de P_n .

Con mas precisión : Pretendemos encontrar la variedad atractora del punto p por la a.l.p. f , denotada así : $\bar{f}(p)$

La definición de $\bar{f}(p)$ es:

$$\bar{f}(p) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} f^m(p)}$$

La raya horizontal en el segundo miembro significa adherencia del conjunto bajo ella colocado. La variedad atractora de p por $f, \bar{f}(p)$, queda así definida como el conjunto de los valores de adherencia de la sucesión formada por las imágenes de p por las iteraciones de f , $p_m = f^m(p)$.

Naturalmente la misma definición de variedad atractora que se acaba de hacer exige la especificación de la topología de P_n , y al estudio de las propiedades topológicas que vamos a necesitar para encontrar las variedades atractoras están dedicados los próximos puntos.

2.1 Topología de P_n

La topología de P_n es la topología cociente respecto a la proyección canónica $g : V_{n+1}^* \longrightarrow P_n$, siendo a su vez la topología de V_{n+1}^* la topología de las trazas sobre dicho conjunto de los abiertos del espacio vectorial topológico normado V_{n+1} homeomorfo a \mathbb{C}^{n+1} . La norma que vamos a utilizar es la norma euclídea de \mathbb{C}^{n+1} . Elegida una base para V_{n+1} , si las coordenadas de v son (x_i) , será:

$$\|v\| = \left(\sum |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Siendo $|x_i|$ el módulo de dicho número complejo.

Los abiertos (cerrados, respectivamente) de V_{n+1}^* serán los abiertos (cerrados, respect.) de V_{n+1} quitando de ellos el vector nulo si lo incluyeran.

Si K es un compacto de V_{n+1}^* , K no puede incluir una sucesión v_m de puntos que tengan al 0 por valor de adherencia en V_{n+1} , ya que - tal sucesión admitiría una subsucesión convergente a cero en V_{n+1} y esta no tendría ningún valor de adherencia en V_{n+1}^* , lo que no es - posible si K es compacto. Así, si K es compacto podemos encontrar una bola con centro en 0, $B(0)$ tal que $K \cap B(0) = \emptyset$. Por otra parte si K es compacto debe estar acotado superiormente en norma. La viceversa también es cierta. De esta forma los compactos K de V_{n+1}^* - se pueden caracterizar como conjuntos cerrados de V_{n+1} acotados -- inferior y superiormente en norma.

2.2 La proyección canónica es abierta

Si $U \subset V_{n+1}^*$ es un abierto de dicho espacio, queremos demostrar que - $g(U^*)$ es abierto de P_n , lo cual, por definición de topología cocien- te, exige probar que $g^{-1}(g(U^*))$ es abierto.

El conjunto $g^{-1}(g(U^*))$ está formado por todos los vectores de la -- forma λU^* , $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Es posible imaginarlo como un cono de base U^* , al - que se le quita el vértice 0, y es efectivamente abierto, ya que la aplicación $f_\lambda(v) = \lambda v$ si $\lambda \neq 0$ es un homeomorfismo $f_\lambda : V_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$ que transforma el abierto U en el abierto λU . Escribiendo:

$$g^{-1}(g(U^*)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda U = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} f_\lambda(U^*)$$

Queda el cono escrito como unión de abiertos.

2.3 La proyección canónica no es cerrada.

Tomemos el conjunto $K = \{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $v_m = 2^m e^{(2\pi/n+1).i} v$

Es facil ver que K tiene todos sus puntos aislados, y es por tanto cerrado. Sin embargo $g(v)$ es un punto de acumulación de $g(K)$ y ---- $g(v) \notin g(K)$, lo que implica que $g(K)$ no es cerrado.

Mas interesante aun es la siguiente observación:

Si A es un operador lineal en V_{n+1}^* y v es un vector propio relativo al valor propio λ donde $|\lambda| \neq 1$, entonces la sucesión $v_m = A^m v$ -- no está acotada inferiormente en norma si $|\lambda| < 1$ y no está acotada superiormente en norma si $|\lambda| > 1$. En cualquiera de los dos casos care-

rá de valores de adherencia. Por el contrario las imágenes de v_m por la proyección canónica son siempre iguales a $g(v)$ y la sucesión $g(A^m(v)) = f_A^m(g(v))$ si tiene a $g(v)$ por valor de adherencia y este es único, y es por tanto la variedad atractora de $g(v)$ por f_A .

Vamos a probar mas en general que a causa de la compacidad de P_n -- las variedades atractoras nunca pueden ser vacias.

2.4 P_n es compacto.

Consideremos la esfera unidad de V_{n+1}^* , $U_n = \{v \in V_{n+1}^* / \|v\| = 1\}$. -- Este conjunto es cerrado y está inferiormente y superiormente acotado en norma, luego es un compacto de V_{n+1}^* . El espacio proyectivo se puede obtener como espacio topológico cociente de U_n de la siguiente manera:

En U_n se establece la relación de equivalencia R_j

$$v R_j w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* / v = \lambda w$$

Obviamente además debe ser $|\lambda| = 1$

Consideremos los diagramas:

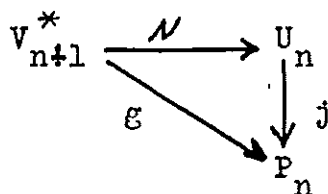


Diagrama 1

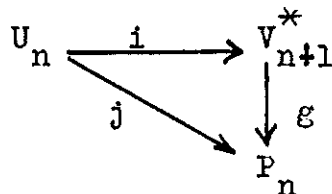


Diagrama 2

En el diagrama 1 la aplicación \mathcal{N} se define $\mathcal{N}(v) = v/\|v\|$ y es continua. La aplicación $j : U_n \longrightarrow P_n$ es la proyección canónica asociada a la relación de equivalencia R_j . Como R_j es la restricción a U_n de la relación de equivalencia R_g que da lugar a la definición de P_n resulta que $g/U_n = j$. Como $\mathcal{N}(v) R_g v$, $g(v) = g(\mathcal{N}(v)) = j(\mathcal{N}(v))$, es decir $g = j\mathcal{N}$.

En el diagrama 2, i es la inclusión. La aplicación j se obtiene como $j = g i$. Si U_n tiene la topología usual como subespacio de V_{n+1}^* , i es continua y por lo tanto también j .

Ahora, si $p \in P_n$ y $g(v) = p$, $j(v/\|v\|) = j\mathcal{N}(v) = g(v) = p$, y esto demuestra que j es sobreyectiva.

De esta forma se obtiene P_n como imagen del compacto U_n por la aplicación continua j . Para concluir la demostración de que P_n es compacto basta demostrar que es separable. Y para demostrar que es separable vamos a ver como es posible dotar a P_n de estructura de espacio métrico.

2.5 P_n como espacio métrico.

El conjunto de puntos de U_n equivalentes a uno de ellos, v , será:

$$C_v = j^{-1}j(v) = \{\lambda v / |\lambda| = 1\} = \{e^{2\pi i \theta} v\} \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Este conjunto por ser imagen inversa por j del cerrado $p = j(v)$ es cerrado y como está incluido en el compacto U_n , es compacto.

Dados v y w , si $C_v \neq C_w$ existe un número real que expresa la distancia entre estos dos conjuntos compactos. Además dicho número es distinto de cero ya que dos clases de equivalencia diferentes son disjuntas. Además se puede encontrar $v_1 \in C_v$ y $v_2 \in C_w$ con $d(v_1, v_2) = d(C_v, C_w)$.

Si $p, q \in P_n$ se define $d(p, q)$ como la distancia de C_v a C_w donde $v \in j^{-1}(p)$ y $w \in j^{-1}(q)$. Mas concretamente $C_v = j^{-1}(p)$ y $C_w = j^{-1}(q)$. Por lo ya dicho, $p \neq q \iff j^{-1}(p) \neq j^{-1}(q)$ y $d(p, q) \neq 0$. También si $d(p, q) = 0$, $j^{-1}(p) = j^{-1}(q) \iff p = q$. Es evidente que $d(p, q) = d(q, p)$. Si $p, q, r \in P_n$ podemos encontrar en $j^{-1}(p)$, $j^{-1}(q)$ y $j^{-1}(r)$ vectores v_1 , v_2 y v_3 respectivamente verificando:

$$d(p, q) = d(v_1, v_2) ; d(q, r) = d(v_2, v_3) ; d(p, r) = d(v_1, v_3)$$

La desigualdad triangular en los vectores v_1, v_2 y v_3 garantiza la desigualdad triangular en las distancias de los puntos p, q, r y esto concluye la prueba de que la distancia así definida es una métrica para P_n . En los espacios proyectivos sobre el cuerpo de los números reales las clases $j^{-1}(p)$ constan solamente de un par de puntos antípodas en la esfera S^n y la definición de distancia en P_n

es la misma que en el caso que nos ocupa.

Probado que P_n es métrico, queda probado que es separable y por lo dicho en el punto anterior, compacto.

2.6 La restricción de g a los compactos es cerrada.

Si K es un compacto de V_{n+1}^* y C un cerrado de K , será compacto, y - como P_n es separable, $g(C)$ será compacto y también cerrado.

La búsqueda de las variedades atractoras precisa de la utilización de las fórmulas analíticas del operador A obtenidas en el primer apartado. En los siguientes puntos se estudia las condiciones en las que dichas fórmulas se pueden utilizar para el cálculo de $\bar{f}(p)$.

2.7 Si $v \in g^{-1}(p)$ y la sucesión de vectores $v_m = A^m(v)$ está inferior y superiormente acotada en norma, entonces:

$$\bar{f}_A(p) = g(\bar{A}(v))$$

La definición de $\bar{A}(v)$, es, como cabe esperar:

$$\bar{A}(v) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m(v)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} A^m(v) \subset A^m g^{-1}(p) & \implies \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m(v)} \subset \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m g^{-1}(p)} \implies \\ \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m(v)} & \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m g^{-1}(p)} \implies g(\bar{A}(v)) \subset \\ \subset g \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} A^m g^{-1}(p)} & \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} g A^m g^{-1}(p)} = \bar{f}_A(p) \end{aligned}$$

Para demostrar la inclusión contraria recordemos que en los espacios métricos el conjunto de los valores de adherencia de una sucesión coincide con el conjunto de los límites de todas sus subsucesiones convergentes, de forma que si $q \in \bar{f}(p)$, podemos construir una subsucesión $f^{m_k}(p)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_k}(p) = q$. Consideremos al propio tiempo la subsucesión de los v_m , $v_{m_k} = A^{m_k}(v) \in A^{m_k} g^{-1}(p)$, con lo que $g(v_{m_k}) = g A^{m_k} g^{-1}(p) = f^{m_k}(p)$. Como v_m está inferior y superiormente acotada en norma, se tendrá que el conjunto $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} v_m}$ será compacto y v_{m_k} admitirá una subsucesión $v_{m_{k_j}}$ convergente.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_{m_{k_j}} = w \in \bar{A}(v)$$

Como g es continua, $g(w) = \lim_{j \rightarrow \infty} g(v_{m_{k_j}}) = q$.

Ya que $g(v_{m_{k_j}})$ es una subsucesión de la sucesión $g(v_{m_k}) = f^{m_k}(p)$ que converge a q

La última relación prueba que $\forall q \in \bar{f}_A(p)$, $q \in g\bar{A}(v)$. Con esta proposición si se verifican las hipótesis de acotación en norma que la hacen verdadera, se puede realizar el estudio de $\bar{f}(p)$ directamente sobre las iteraciones $A^m(v)$ en V_{n+1} . Infortunadamente las hipótesis de acotación de $A^m(v)$ exigen una condición sumamente restrictiva: que el operador A sea diagonalizable, o por lo menos que lo sea su restricción a algún subespacio invariante que contenga a v . Este caso resulta ser al que se pueden reducir los demás casos, y figura tratado al final del apartado 3. No obstante para estudiar los casos mas generales, es preciso utilizar un procedimiento mas potente que el descrito, que se desarrolla en los próximos puntos

2.8 Espacio afin H_n , asociado a P_n

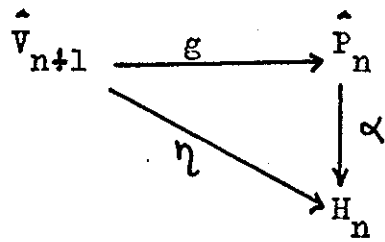
En el 1.3b) se definian las coordenadas afines. Ahora nos proponemos estudiarlas desde el punto de vista topológico. Estas coordenadas permiten establecer una aplicación continua entre todos los vectores de V_{n+1} que no tienen nula una coordenada, digamos la x_0 , sobre el hiperplano de V_{n+1} de ecuación $x_0 = 1$, que llamaremos hiperplano H_n , mientras que el $x_0 = 0$ será H_0 o hiperplano impropio. La aplicación continua que se establece, si $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \hat{V}_{n+1}$ donde $\hat{V}_{n+1} = V_{n+1} - H_0$, se define:

$$\eta(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1/x_0, x_2/x_0, \dots, x_n/x_0)$$

El punto que figura en el segundo miembro se identifica con un punto de H_n , añadiéndole una primera coordenada igual a 1. De esta manera queda establecida $\eta: \hat{V}_{n+1} \rightarrow H_n$. Habitualmente llamaremos a las coordenadas de los puntos de H_n , ξ_i .

Si consideramos en H_n la topología usual T_u inducida por las trazas de los abiertos de \hat{V}_{n+1} sobre H_n , la aplicación η sabemos que es continua. (Observar que al ser $V_{n+1} \supset V_{n+1}^* \supset \hat{V}_{n+1}$, la T_u que hemos escogido para H_n , coincide con la topología de las trazas de V_{n+1} sobre H_n)

Consideremos ahora el siguiente diagrama:



Donde:

a) g es la restricción de la proyección canónica a \hat{V}_{n+1} y \hat{P}_n es ---
 $\hat{P}_n = P_n - g(H_n)$ de forma que g es sobreyectiva en el diagrama. La -
topología de \hat{P}_n es la cociente para la aplicación g , y sabemos --
por 2.2 que g es abierta.

b) η es la definida mas arriba y es sobreyectiva:

$$\eta(1, x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

η es también abierta, pues si $\hat{B} = B \cap \hat{V}_{n+1}$ es un abierto de T_u , -
 $\eta(\hat{B})$ se obtiene como intersección del cono de base \hat{B} y vértice en
 \emptyset (excluido el \emptyset), con H_n :

$$\eta(\hat{B}) = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \hat{B} \right) \cap H_n$$

Es decir , seleccionando de todos los puntos con coordenadas propor-
cionales a los de \hat{B} , aquellos que tengan su primera coordenada ---
igual a uno. Ya hemos razonado anteriormente que los conos de base
abierta son abiertos, y por tanto $\eta(\hat{B})$ se obtiene como la traza -
de un abierto sobre H_n y será abierto.

c) Se define $\alpha(p) = \eta g^{-1}(p)$.

Como dos vectores de $g^{-1}(p)$ tienen coordenadas proporcionales, sus
imágenes por η coinciden y α está bien definida. Inversamente, dos
vectores cuyas coordenadas no son proporcionales no tienen la misma
imagen por η y α es inyectiva.

$$\alpha^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(1, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

demuestra que α es sobreyectiva.

Vamos a probar que α es un homeomorfismo.

Si B es un abierto de H_n , $\eta^{-1}(B)$ es abierto de \hat{V}_{n+1} por ser -----
continua y $g(\eta^{-1}(B))$ es abierto por ser g abierta . Pero -----
 $\alpha^{-1}(B) = g(\eta^{-1}(B))$, y por tanto $\alpha^{-1}(B)$ es abierto y α continua.

También α^{-1} es continua, pues si B es abierto de \hat{P}_n , $\alpha(B) = \eta(g^{-1}(B))$ es abierto por ser g continua y η abierta, luego α es un homeomorfismo $\alpha: \hat{P}_n \longrightarrow H_n$

2.9 Las expresiones $\eta A^m(v)$ pueden carecer de sentido cuando $x_0(m) = 0$. Para evitar este problema, basta comprobar que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_0(m) \neq 0$, ya que entonces existe m_0 / $m > m_0 \Rightarrow x_0(m) \neq 0$, y los valores de adherencia de $f^m(g(v))$ no varían prescindiendo de los m_0 primeros términos de la sucesión. Esta hipótesis sobre el $\lim_{m \rightarrow \infty} x_0(m) \neq 0$ se presupone en el próximo punto

2.10 Si $v \in g^{-1}(p)$

$$\bar{f}_A(p) = \alpha^{-1}(\overline{\eta A}(v))$$

Donde la definición de $\overline{\eta A}(v)$ es:

$$\overline{\eta A}(v) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} \eta(A^m(v))}$$

Teniendo en cuenta que α es homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{f}_A(p) &= \alpha \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} f_A^m(p)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} \alpha f_A^m(p)} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} \alpha g A^m g^{-1}(p)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} \eta A^m g^{-1}(p)} . \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=i}^{\infty} \eta(A^m(v))} = (\overline{\eta A})(v), \text{ de donde:} \end{aligned}$$

$$\bar{f}_A(p) = \alpha^{-1}(\overline{\eta A})(v)$$

La proposición que acabamos de probar proporciona un poderoso método para el cálculo de las variedades atractoras, ya que aunque en general las coordenadas de $A^m(v)$ no están acotadas por lo que no es posible la aplicación de 2.8, si seleccionamos convenientemente la base de V_{n+1} eligiendo para primera coordenada de forma adecuada, las coordenadas de $\eta A^m(v)$ se mantienen acotadas y es posible calcular los valores de adherencia de la sucesión por ellas formada, como vamos a ver en lo que sigue.

2.11 Supongamos $v \in W$ y $A(W) \subset W$. El estudio de $\bar{f}_A(p)$ con $p = g(v)$ puede hacerse restringiendo el espacio proyectivo P_n a la variedad proyectiva $g(W^*)$, utilizando $f_A/g(W^*)$, y el operador asociado a --- esta aplicación, que será A/W^* .

Basta probar que $\bar{f}_A(p) \subset g(W^*)$. Esto será cierto si $g(W^*)$ es cerrado ya que entonces debe contener todos los valores de adherencia de la sucesión $f_A^m(p)$ ya que esta está incluida en $g(W^*)$ por ser ---- $p \in g(W^*)$ y $\bar{f}_A(g(W^*)) \subset g(W)$ como se comprueba inmediatamente, por ser $A(W) \subset W$.

Que $g(W^*)$ es cerrado es consecuencia de que $g^{-1}g(W^*) = W^*$ es un cerrado de V_{n+1}^* ya que es traza de W sobre V_{n+1}^* y W es cerrado en --- V_{n+1} por ser subespacio vectorial.

Este método de restricción a subespacios invariantes será utilizado frecuentemente en el próximo apartado.

3.- ESTUDIO DE LAS VARIEDADES ATRACTORAS

3.1 Teorema 1

Si la matriz del operador A asociado a la a.l.p. f_A se reduce a una única célula de Jordán, entonces la variedad atractor de cualquier punto p, $\bar{f}_A(p)$ se reduce a un único punto q, que verifica $f_A(q) = q$. Empezamos viendo que se puede suponer que el valor propio de A vale $\lambda_1 = 1$. Por 1.2 sabemos que el operador A está determinado salvo un factor de proporcionalidad distinto de cero. Si fuera $\lambda_1 \neq 1$, bastaría trabajar con el operador $A' = 1/\lambda_1 A$. Si v es un vector propio de A se tiene:

$$A'v = 1/\lambda_1 \cdot \lambda_1 v = v,$$

Luego A' sí tendría valor propio igual a uno. La matriz de A' en una base adecuada se expresa mediante una única célula de Jordán relativa al valor propio uno, condiciones que podemos suponer que verifica ya de partida el operador A. Sea C la matriz de A

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando las expresiones obtenidas en 1.11

$$C_{ij}^m = \begin{bmatrix} m \\ j-i \end{bmatrix}$$

Estas expresiones no están acotadas. Son polinomios de grado j-i en la variable m. Para la demostración de este teorema y debido a lo sencillo del caso que se estudia no utilizaremos el sistema de subíndización de la base expuesto en 1.10, sino que utilizamos el sistema habitual con un sólo subíndice. Así la expresión matricial de $A^m(v)$ será:

$$\lambda x_i(m) = \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} m \\ j-i \end{bmatrix} x_j$$

Donde x_j son las coordenadas de v y $x_i(m)$ las de $A^m(v)$.

y 2.10 . Para $\eta A^m(v)$ tendremos la expresión:

$$\xi_i(m) = \frac{\sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} m \\ j-1 \end{bmatrix} x_j}{\sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} x_j}$$

Hay que justificar que se cumple la condición descrita en 2.9 para poder utilizar el resultado 2.10

Suponemos para ello que $v \in g^{-1}(p)$. Como $v \neq 0$ no puede ser $\forall j \ x_j = 0$. Si definimos la altura de v respecto a la base B (base canónica para la que la matriz de A se escribe como C) como el subíndice j máximo para el que $x_j \neq 0$ y lo escribimos $h(v) = h$, resulta que el polinomio del numerador será de grado $h-i$ y el polinomio del denominador de grado h . Se tiene así que es posible encontrar m_0 tal que si m es mayor que m_0 , $x_0(m) \neq 0$. Con esto podemos pasar a utilizar el resultado 2.10. Como si $i \neq 0$ $h > h-i$, resulta que $i \neq 0 \implies$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i(m) = 0$$

Esto significa que $A^m(v)$ tiene límite :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta A^m(v) = (0,0,0,\dots,0)$$

Y evidentemente este límite es el único valor de adherencia de la sucesión $\eta A^m(v)$. Por tanto:

$$\bar{f}_A(p) = \alpha^{-1}(\overline{\eta A(v)}) = g(\lambda(1,0,0,\dots,0)) = q.$$

Por 1.7 sabemos que q es fijo, y como solo existe un punto fijo , es único, lo que concluye la demostración.

Para estudiar el caso en que A se descompone en varias células de Jordán hay que utilizar el sistema de subíndices descrito en 1.10 . Previamente hay que definir el concepto de altura de v respecto a B que ha jugado un importante papel ya en el caso que acabamos de ver

3.2 Sea $B = \{e_{ijk}\} \cdot R$

Se llama altura de un vector v respecto al subespacio invariante elemental V_{ij} al número $h_{ij}(v) = h_{ij}$ que expresa la altura de la

proyección de v sobre V_{ij} , $\text{pr}_{ij}(v)$ respecto a la base B_{ij} . Si fuera $\text{pr}_{ij}(v) = 0$ se define $h_{ij}(v) = -1$. Dicho de otra forma, h_{ij} es el máximo valor del índice k que verifica $x_{ijk} \neq 0$, si existe, y en caso contrario h_{ij} es -1 .

Vamos a demostrar el siguiente lema:

3.3 Sin pérdida de generalidad se puede siempre suponer que $h_{ij}(v)$ es mayor que -1 . $\forall (i,j) \in J$

Excluimos el caso $v=0$ que no se puede presentar para ningún v --- $v \in g^{-1}(p)$. Si J' es el conjunto de índices para los s.i.e. respecto de los que v no tiene altura negativa:

$$J' = \{(i,j) \in J / h_{ij}(v) \geq 0\}$$

Formamos la suma directa:

$$W = \bigoplus_{J'} V_{ij}$$

Si $\text{pr}_{ij}(v) \neq 0$, entonces el correspondiente V_{ij} figura en dicha suma por lo que $v \in W$, y como además $A(W) \subset W$ por ser W suma de subespacios invariantes bastaría realizar nuestro estudio para el operador A restringido a $W^* = W - 0$ y el espacio proyectivo $g(W^*)$ según lo expuesto en 2.11

3.4 Sin pérdida de generalidad se puede suponer que si es -----

$\text{Spec } A = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{P}}$, $\lambda_1 = 1$ y si $i > 1$ $|\lambda_i| \leq 1$

Si no fuera así siempre se podría ordenar $\text{Spec } A$ de forma que $|\lambda_1| \geq |\lambda_i| \forall i \in \mathbb{P}$. Luego hacemos $A' = 1/\lambda_1 A$ como hicimos en 3.1 y el operador A' , equivalente al A verifica las condiciones referidas.

3.5 Si $|\lambda_i| < 1$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{ijk}^{(m)} = 0$ donde $\xi_{ijk}^{(m)} = \frac{x_{ijk}^{(m)}}{x_{110}^{(m)}}$ es la coordenada correspondiente de $\eta_{A^m}(v)$

Sabemos que A/V_{ij} opera con matriz C_{ij} célula de Jordán, si se refiere a la base B_{ij} , y que el valor propio de C_{ij} es λ_i . Aplicando las fórmulas obtenidas en 1.11 se tiene:

$$x_{ijk}(m) = \sum_{\ell=0}^{r_{ij}} \begin{bmatrix} m \\ \ell-k \end{bmatrix} \lambda_i^{m-\ell+k} x_{ij\ell}$$

Donde r_{ij} , según lo visto en 1.10 es igual a $\dim(V_{ij}) - 1$

Si h_{ij} es la altura de v respecto a B_{ij}

$$x_{ijk}(m) = \sum_{\ell=0}^{h_{ij}} \begin{bmatrix} m \\ \ell-k \end{bmatrix} \lambda_i^{m-\ell+k} x_{ij\ell}$$

$$x_{110}(m) = \sum_{\ell=0}^{h_{11}} \begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix} \lambda_1^{m-\ell} x_{11\ell} = \sum_{\ell=0}^{h_{11}} \begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix} x_{11\ell}, \text{ pues}$$

$$\lambda_1 = 1$$

Como $|\lambda_i| < 1$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_i^{m-\ell+k} = 0$ y también $\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m \\ \ell-k \end{bmatrix} \lambda_i^{m-\ell+k} = 0$

y por tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{ijk}(m) = 0$.

Pueden utilizarse los resultados de 2.10 puesto que como $h_{11} \geq 0$, --

$x_{110}(m)$ es un polinomio de grado cero no nulo, o de grado mayor que cero, y vale el razonamiento hecho en la demostración del Teorema 1

Como en la fracción que expresa ξ_{ijk} el numerador tiende a cero y el denominador no lo hace, la fracción tiende a cero como deseábamos demostrar.

3.6 Si $|\lambda_i| = 1$ y $h_{ij}(v) < h_{11}(v)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{ijk}(m) = 0$

Tomando módulos en las expresiones obtenidas en el anterior punto - para ξ_{ijk} :

$$|\xi_{ijk}| \leq \frac{\sum_{\ell=0}^{h_{ij}} \begin{bmatrix} m \\ \ell-k \end{bmatrix} |x_{ij\ell}|}{\left| \sum_{\ell=0}^{h_{11}} \begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix} x_{11\ell} \right|}$$

teniendo en cuenta que $|\lambda_i|^{m-\ell+k} = 1$ por ser $|\lambda_i| = 1$

Dividiendo el numerador y denominador de esta expresión por la máxima potencia de m que en ellos figura, que según la hipótesis de partida es $m^{h_{11}}$ resulta que el denominador tiende a $|x_{11h_{11}}|$ y el numerador a cero cuando m tiende a infinito (por ser el máximo grado posible en el numerador h_{ij} estrictamente menor que h_{11}). De esta forma resulta que $\lim_{m \rightarrow \infty} |\xi_{ijk}(m)| = 0$, luego $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{ijk}(m) = 0$

3.7 Si $|\lambda_i| = 1$, $h_{ij}(v) = h_{11}(v)$ y $k > 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{ijk}(m) = 0$

Observando la expresión obtenida como cota superior de $|\xi_{ijk}(m)|$ en el anterior punto se ve que su numerador es una expresión polinómica en m cuyo grado es $h_{ij} - k$, mientras que en el denominador figura la potencia $m^{h_{11}}$. Por tanto si $h_{ij} = h_{11}$ pero $k \neq 0$ dividiendo como antes entre $m^{h_{11}}$ se prueba la proposición.

¿ Como utilizar los tres resultados de 3.5, 3.6 y 3.7 para facilitar el cálculo de $(\overline{\eta A})(v)$?

3.8 Si $(x_i(m))_{i \in \mathcal{N}}$ $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ es una sucesión de n -tuplas de \mathbb{C}^n y tenemos $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ verificando $\forall i \in \mathcal{M} \implies \lim_{m \rightarrow \infty} x_i(m) = 0$ entonces el conjunto de valores de adherencia de la sucesión -----

$(x_i(m))_{i \in \mathcal{N}}$ coincide con el conjunto de los valores de adherencia de la sucesión $(x_i^*(m))_{i \in \mathcal{N}}$ definida por las relaciones:

$$\begin{aligned} x_i^*(m) &= x_i(m) \text{ si } i \notin \mathcal{M} \\ x_i^*(m) &= 0 \text{ si } i \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Ya que dos sucesiones de un espacio métrico, p_n y q_n que verifican $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q_n) = 0$ tienen obviamente los mismos valores de adherencia, y las sucesiones $(x_i(m))$ y $(x_i^*(m))$ verifican esta condición.

Según lo cual podemos estudiar $(\overline{\eta A})(v)$ estudiando los valores de adherencia de la sucesión $(\xi_{ijk}^*(m))_R$ obtenida anulando ciertas coordenadas de la $(\xi_{ijk}(m))_R$ cuyo límite sea cero.

Vamos a realizar este proceso en dos etapas. En primer lugar solo anularemos las coordenadas que están en los casos descritos en los puntos 3.5 y 3.6, y en un segundo paso haremos lo propio con las coordenadas que se encuentran en la situación descrita en 3.7

Como las coordenadas que corresponden a la proyección de v sobre un s.i.e. no intervienen sobre las coordenadas de las proyecciones de $A^m(v)$ sobre los demás subespacios invariantes ya que

$$x_{ijk}(m) = \sum_{\ell=0}^{h_{ij}} \binom{m}{\ell-k} \lambda_i^{m-\ell+k} x_{ij\ell}$$

Si es $J_1 = \left\{ (i, j) \in J / |\lambda_i| = 1 \text{ y } h_{ij}(v) = h_{11}(v) \right\}$

y formamos la suma directa:

$$W = \bigoplus_{J_1} V_{ij} \quad E = \bigoplus_{J \neq J_1} V_{ij}$$

Se tendrá para el espacio total $V_{n+1} = W \oplus E$, y para v , $v = w + e$ --- con $w \in W$ y $e \in E$. La sucesión de coordenadas de $A^m(w)$, $(y_{ijk})_R$ --- será $x_{ijk} = y_{ijk}$ si $(i,j) \in J_1$, $y_{ijk} = 0$ si $(i,j) \notin J_1$. Para los cocientes se verifica:

$\xi_{ijk}(m) = x_{ijk}(m)/x_{110}(m) = y_{ijk}(m)/y_{110}(m) = \xi_{ijk}^*(m)$ si $(i,j) \in J_1$, teniendo en cuenta que como precisamente $(1,1) \in J_1$, $x_{110}(m) = y_{110}(m)$ para m suficientemente grande son distintos de --- cero.

$$\xi_{ijk}^*(m) = 0 \text{ si } (i,j) \notin J_1$$

Como J_1 agrupa todos los (i,j) que cumplen las hipótesis de 3.5 y 3.6, resulta que $\lim x_{ijk}(m) = 0$ si $(i,j) \notin J_1$

Según la observación hecha al principio de este punto, tenemos que:

$$(\overline{\eta A})(w) = (\overline{\eta A})(v)$$

Como $w \in W$ y $A(W) \subset W$ por ser W suma de s.i.e., aplicando lo dicho en 2.11, si llamamos $q = g(w)$ y $F = g(W^*)$ resulta:

3.9 Dada la a.l.p $f_A : P_n \rightarrow P_n$ y $p \in P_n$, se puede encontrar una variedad lineal proyectiva F y un vector $q \in F$ verificando:

a) $f_A(F) \subset F$

b) el operador lineal asociado a f_A/F que coincide con $A/g^{-1}(F)$ tiene un espectro que consta exclusivamente de valores --- propios de módulo uno y la altura de $v \in g^{-1}(q)$ es igual para todos los s.i.e. que componen $g^{-1}(F)$

c) La variedad atractora de p por f_A es la misma que la de q por f_A/F

3.10 En este punto nuestras hipótesis son para f_A y A las condiciones que cumplan en 3.9 f_A/F y $A/g^{-1}(F)$, es decir:

a) $\forall \lambda_i \in \text{Spec} A, |\lambda_i| = 1$

b) $\forall (i,j) \in J, h_{ij}(v) = h_{11}(v), v \in g^{-1}(p)$

Se trata ahora de utilizar el resultado 3.7 que nos permite prescindir

dir de las coordenadas x_{ijk} con $k > 0$. No obstante hay que actuar de manera diferente que en el punto anterior, pues si ahora formamos como antes las iteraciones de un vector construido anulando previamente todas aquellas coordenadas de v cuyo límite es cero, las iteraciones de este vector no coinciden con las de v . Será necesario actuar precisando el límite de las coordenadas que no tienden a cero y construir un vector cuyas iteraciones tengan esos límites. Partiendo de la expresión:

$$\xi_{ij0}(m) = \frac{\sum_{\ell=0}^h \binom{m}{\ell} \lambda_i^{m-\ell} x_{ij\ell}}{\sum_{\ell=0}^h \binom{m}{\ell} x_{11\ell}}$$

Donde se ha hecho $h_{11}(v) = h_{ij}(v) = h$.

Dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia de m , m^h :

$$\xi_{ij0}(m) = \frac{x_{ijh} \lambda_i^{m-h} + \psi(\lambda_i, m)}{x_{11h} + \phi(m)}$$

Es claro que $\phi(m) \rightarrow 0$, ya que esta expresión agrupa el cociente de los términos del denominador de grado menor que h en m entre m^h . Vamos a probar que también $\psi(\lambda_i, m) \rightarrow 0$.

Dicha expresión es el resultado de quitar del numerador su término de grado h en m , $x_{11h} \lambda_i^{m-h} m^h$, y dividir el resto entre m^h . Así:

$$\psi(\lambda_i, m) = \frac{\sum_{\ell=0}^{h-1} P_{\ell}(m) \lambda_i^{m-\ell} x_{ij\ell}}{m^h}$$

Donde los $P_{\ell}(m)$ son de grado menor que h . Escribiendo:

$$Q_{\ell}(m) = 1/\lambda_i^{\ell} \cdot P_{\ell}(m) x_{ij\ell}$$

$$\psi(\lambda_i, m) = \frac{\sum_{\ell=0}^{h-1} Q_{\ell}(m) \lambda_i^m}{m^h}$$

Tomando módulos:

$$|\psi(\lambda_i, m)| \leq \frac{\sum_{\ell=0}^{h-1} |Q_{\ell}(m)|}{m^h}, \text{ ya que } |\lambda_i|^m = 1.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell=0}^{h-1} |Q_{\ell}(m)|}{m^h} = 0 \text{ por ser el grado de } Q_{\ell} < h \text{ y } \text{----}$$

esto concluye la prueba de que $\Psi(\lambda_{i,m}) \rightarrow 0$

Los términos que quedan en la fracción $\xi_{ij0}^{(m)}$ al anular las partes que tienden a cero son : x_{1lh} , constante, y la expresión $x_{ijh} \lambda_i^{m-h}$ que como $|\lambda_i| = 1$ no tiene límite en general. Lo que se puede afirmar es:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\xi_{ij0}^{(m)} - \frac{x_{ijh} \lambda_i^{m-h}}{x_{1lh}}) = 0$$

La sucesión $(\xi_{ij0}^{*(m)})_J$ donde:

$$\xi_{ij0}^{*(m)} = x_{ijh} \lambda_i^{m-h} / x_{1lh}$$

$$\xi_{ijk}^{*(m)} = 0 \text{ si } k > 0$$

Es claro que $\lim (\xi_{ijk}^{(m)} - \xi_{ijk}^{*(m)})_R = 0$ de manera que ambas -- sucesiones tienen los mismos valores de adherencia.

Consideremos ahora el vector w cuyas coordenadas son:

$$y_{1l0} = x_{1lh}; y_{ij0} = x_{ijh} \lambda_i^{-h}; y_{ijk} = 0 \text{ si } k > 0$$

El vector w solo tiene distintas de cero las coordenadas relativas a los vectores de la base canónica de la forma e_{ij0} , que recordando lo dicho en 1.10 son vectores propios, de forma que $A^m e_{ij0} = \lambda_i^m e_{ij0}$, y tendremos para las coordenadas de $A^m(w)$:

$$y_{1l0}^{(m)} = \lambda_1^m x_{1lh} = x_{1lh}$$

$$y_{ij0}^{(m)} = \lambda_i^m x_{ijh} \lambda_i^{-h} = x_{ijh} \lambda_i^{m-h}$$

$$y_{ijk}^{(m)} = 0 \text{ si } k > 0$$

Se tiene así que las coordenadas afines de $A^m(w)$, $\eta A^m(w)$ coinciden con las $(\xi_{ijk}^{*(m)})_R$, cuyos valores de adherencia eran a su vez los de $(\xi_{ijk}^{(m)})_R$, es decir, los de $\eta A^m(v)$

El vector w que hemos hallado verificando tal propiedad se halla incluido en la suma de los subespacios propios de V_{n+1} . Si hacemos:

$$W = \bigoplus_J \langle e_{ij0} \rangle$$

Se verifican las siguientes condiciones:

a) $w \in W$

b) $A(W) \subset W$

c) A/W es un operador diagonal

d) $(\overline{\eta A})(w) = (\overline{\eta A})(v)$

La propiedad c) es consecuencia de que W admite una base formada por vectores propios. Las demás ya han sido justificadas.

Vamos a recoger este resultado en el siguiente teorema:

3.11 Teorema 2

Dada la a.l.p. $f_A: P_n \longrightarrow P_n$ y $p \in P_n$, podemos encontrar una variedad lineal proyectiva F y un $q \in F$ verificando:

- a) $f_A(F) \subset F$
- b) f_A/F tiene un operador lineal asociado que es diagonalizable y cuyo espectro consta de valores propios iguales en módulo a uno.

c) La variedad atractora por f de p es la misma que la de q por f_A/F

Naturalmente, se toma $v \in g^{-1}(p)$, y obtenidos w y W por los procedimientos descritos en el punto anterior, es $q = g(w)$ y $F = g(W^*)$

Nota : Aunque en las hipótesis de este teorema no figuran los supuestos hechos al comienzo de 3.10, ya se dejó claro la posibilidad de reducir cualquier caso al caso en que se verifican dichos supuestos.

Resulta útil disponer de un criterio suficiente para que la variedad atractora de un punto se reduzca a un solo punto

3.12 Condiciones suficientes para que la variedad atractora $\bar{f}_A(p)$ conste de un solo punto:

Para simplificar los enunciados, hacemos uso del resultado 3.3, partiendo del supuesto de que para todo s.i.e. $\forall_{ij} h_{ij}(v) \neq -1$, es decir, $pr_{ij}(v) \neq 0$. Las condiciones suficientes son

- 1) Que haya algún valor propio de módulo mayor que los demás.

Pues aplicando el resultado del punto anterior, apartado b) del teorema 2, resultaría que el espectro del operador se reduciría a un solo valor propio y el vector w obtenido en el citado teorema sería un vector propio lo que hace evidente la proposición.

2) Que, habiendo varios valores propios de módulo máximo y alcance para alguno de los s.i.e. correspondiente a uno de los valores propios de módulo máximo, altura mayor que para los demás. Aplicando b) de 3.9 se reduce el estudio de $\bar{f}(p)$ al de $\bar{f}(q)$ donde $w \in g^{-1}(q)$ está incluida en un s.i.e. (ya que solo hay uno de altura máxima entre los de módulo máximo), y el resultado se completa usando el teorema 1 de 3.1.

El teorema 2 conduce a concentrar nuestra atención al caso particular de operadores diagonalizables de valores propios con módulo unidad. Pero antes de iniciar este estudio vamos a ver que se puede afinar mas añadiendo al teorema 2 una nueva proposición.

3.12 En las hipótesis del teorema 2, puede encontrarse q y F verificando a) b) c) y además

d) el operador lineal asociado a f_A / F puede ser escrito en una base adecuada como un operador diagonal con valores propios de multiplicidad uno

La nueva condición que vamos a demostrar significa que la matriz del operador en la base referida será una matriz diagonal compuesta por números complejos del mismo módulo (1), pero diferentes entre sí.

Para hacer la demostración podemos suponer $F = P_n$, y modificar el sistema de subíndices que hemos venido usando hasta ahora para hacerlo mas simple. Asi será $\text{Spec} A = \{\lambda_k\}_{k \in \Phi}$. Si cada λ_k tiene multiplicidad α_k el subespacio propio relativo a λ_k será

$$V^{\lambda_k} = \bigoplus_{j=1}^{\alpha_k} \langle e_{kj} \rangle$$

Siendo los e_{kj} los α_k vectores propios que forman la base de V^{λ_k} . Se tiene asi:

$$Ae_{kj} = \lambda_k e_{kj}$$

La base total del espacio vectorial V_{n+1} es ahora:

$$B = \{e_{kj}\} \quad (k,j) \in K \quad \text{con } K = \{(k,j) / k \in \Phi \text{ y } 1 \leq j \leq \alpha_k\}$$

El vector v se escribe:

$$v = \sum_K x_{ij} e_{ij}$$

Para Av tenemos:

$$Av = \sum_K \lambda_k x_{kj} e_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{P}} \lambda_k \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} x_{kj} e_{kj} \right)$$

Donde se ha procedido sacando λ_k factor común de todos los términos en los que figura, que són correspondientes a los vectores de la base de V^{λ_k} . Escribiendo:

$$v_k = \sum_{j=1}^{\alpha_k} x_{kj} e_{kj}$$

$$Av = \sum_{k \in \mathcal{P}} \lambda_k v_k$$

Si consideramos el subespacio generado por los v_k , $W = \langle v_k \rangle_{k \in \mathcal{P}}$ se tendrá $A(W) \subset W$, $v \in W$ y además el operador $A|_W$ expresado en la base $B_W = \{v_k\}_{k \in \mathcal{P}}$ (aplicando 3.3 resulta $\forall k \ v_k \neq 0$, y es un resultado conocido que vectores propios relativos a diferentes valores propios son linealmente independientes), es un operador diagonal y sus valores propios son todos diferentes (recordar que se ha obtenido un v_k por cada λ_k diferente). Esto concluye la demostración de nuestra proposición.

Con este resultado, las iteraciones de cualquier a.l.p. pueden estudiarse a través de una a.l.p. de operador lineal asociado diagonal con todos sus valores propios de módulo igual a 1 y de multiplicidad uno. Antes de pasar al análisis de este último caso, debemos exponer un resultado que vamos a necesitar: El llamado teorema de Kronecker n-dimensional:

3.13 Teorema de Kronecker n-dimensional

Si $a \in \mathbb{R}$ $[a] = a - E(a)$, donde $E(a)$ es la parte entera de a . Así,

$a \in I_1 = [0, 1]$ y $e^{2\pi i [a]} \in S_1$, circunferencia unidad

Sea la colección de números reales $Q = \{a_1, a_2, \dots, a_n, 1\}$. Se dice -- de Q que es linealmente independiente si no hay números enteros -- k_1, k_2, \dots, k_n, k verificando $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n + k = 0$

Si llamamos $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $(e^{2\pi i [a_k]})_{k \in N}$ es una n-tupla de $T_n = S_1^n$, toro n-dimensional, y $\alpha(m) = (e^{2\pi i [ma_k]})_{k \in N}$, es una sucesión de n-tuplas de T_n .

El teorema de Kronecker en n dimensiones afirma que si \mathcal{Q} es linealmente independiente $\alpha(m)$ es denso en T_n .

Dicho en un lenguaje mas próximo a nuestras necesidades, el conjunto de los valores de adherencia de la sucesión de n-tuplas $\alpha(m)$ es todo T_n .

Pasemos a estudiar el caso último que se aborda en este apartado:

$f_A: P_n \rightarrow P_n$ es una a.l.p., $A: V_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$ su operador lineal asociado. Se verifica:

a) A es diagonalizable. $\text{Spec} A = \{\lambda_k\}_{k \in \mathcal{P}}$ está compuesto de valores propios diferentes de módulo y multiplicidad igual a uno

b) La familia de números reales $\mathcal{Q} = \{\{\theta_k\}_{k \in \mathcal{P}} \cup \{1\}\}$ es una familia linealmente independiente, siendo $\theta_k = \arg(\lambda_k) / 2\pi$.

Esta hipótesis es equivalente a esta otra:

b*) La familia $\mathcal{Q} = \{\{\arg(\lambda_k)_{k \in \mathcal{P}} \cup \{2\pi\}\}$ es independiente.

Sea una base B compuesta por vectores propios: $B = \{v_k\}_{k \in \mathcal{P}}$

Para cualquier vector $v \in V_{n+1}$ se puede escribir:

$$v = \sum_{k \in \mathcal{P}} x_k v_k$$

Donde las x_k son las coordenadas de v respecto la base B. Además:

$$A^m(v) = \sum_{k \in \mathcal{P}} \lambda_k^m x_k v_k$$

Como $|\lambda_k| = 1$ se puede escribir $\lambda_k = e^{2\pi i \theta_k}$, donde $\theta_k = \arg(\lambda_k) / 2\pi$. Elevando a m

$$\lambda_k^m = e^{2\pi i m \theta_k} = e^{2\pi i [m \theta_k]}$$

Por el teorema de Kronecker, las n+1-tuplas $(e^{2\pi i [m \theta_k]})_{k \in \mathcal{P}}$ cubren densamente el toro n+1 dimensional T_{n+1} .

Consideremos ahora la aplicación $\mathcal{C}: T_{n+1} \rightarrow V_{n+1}^*$

$$\mathcal{C}[(\lambda_k)_{k \in \mathcal{P}}] = \sum_{k \in \mathcal{P}} \lambda_k x_k v_k$$

Podemos suponer $\forall k \ x_k \neq 0$ según 3.3. De la independencia lineal de los vectores $x_k v_k$ se deduce que \mathcal{C} es inyectiva y de las propiedades de continuidad de la suma y producto por números complejos en V_{n+1}^*



5307411482

- 31 -

se deduce que $\mathcal{C}: T_{n+1} \longrightarrow \mathcal{C}(T_{n+1})$ es un homeomorfismo.

La imagen inversa por \mathcal{C} de $A^m(v)$, es precisamente la sucesión de $n+1$ tuplas $(e^{2\pi i [m \theta_k]})$. Por tanto los valores de adherencia de

$\mathcal{C}^{-1}(A^m(v))$ cubren todo T_{n+1} , y de ello se deduce que los valores de adherencia de $A^m(v)$, es decir $(\bar{A})(v)$, cubren $\mathcal{C}(T_{n+1})$.

De ello resulta que $(\bar{A})(v)$ es una variedad de V_{n+1} homeomorfa al -- toro $n+1$ dimensional T_{n+1} , cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$w = \sum_{\mathcal{P}} \nu_k u_k, |\nu_k| = 1 \quad \forall k \in \mathcal{P}$$

Donde se ha tomado $u_k = x_k v_k$

El operador A conserva la norma:

$$\|Av\| = \left(\sum |\nu_k|^2 |x_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum |x_k|^2 \right)^{1/2} = \|v\|$$

Esto demuestra que $A^m v$ está superior e inferiormente acotado en norma. Aplicando el resultado 2.7, si $p = g(v)$,

$$\bar{f}_A(p) = g((\bar{A})(v))$$

Es decir: La variedad atractora de p por f_A se obtiene como proyección canónica de una variedad homeomorfa a un toro T_{n+1}

A continuación comprobamos que esta variedad es homeomorfa a un toro n -dimensional:

Si tomamos $q \in g(\bar{A})(v)$, $g^{-1}(q) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Tomando coordenadas afines: $\eta g^{-1}(q) = (y_1/y_0, y_2/y_0, \dots, y_n/y_0)$.

Como $g^{-1}(p) \in T_{n+1}$, $\forall k \quad |y_k| = 1$. También $\forall k \quad |y_k/y_0| = 1$ y eso demuestra que $\eta g^{-1}(q) \in T_n$. Ahora, por 2.8 sabemos que $\alpha = \eta g^{-1}$ es un homeomorfismo y como se comprueba fácilmente $\alpha / g(\bar{A})(v)$ cubre todo T_n , y es el homeomorfismo deseado.

Hemos demostrado así, por aplicación sucesiva de los teoremas 2 y de los resultados de dos últimos puntos:

3.14 Teorema 3

Si f_A es una a.l.p. y su operador asociado A tiene valores propios cuyos argumentos y el número 2π forman una familia de números linealmente independientes, la variedad atractora de un punto p por f es una variedad de P_n homeomorfa a un toro r -dimensional.